

Instabilité d'écoulements axisymétriques coaxiaux

Nadia Mehidi, Nawel Amatusse

*Université A. Mira de Béjaia
Laboratoire de Physique Théorique
Département de Physique Route de Targa Ouzemmour. Béjaia 06000. ALGERIE
nadbouam@yahoo.fr*

Résumé :

Un modèle analytique décrivant l'écoulement de deux fluides à l'intérieur d'une conduite cylindrique est considéré. L'équation d'évolution de l'interface aux grandes ondes est obtenue en combinant un développement en gradient avec une méthode aux résidus pondérés. L'étude de la stabilité linéaire met en évidence, la dépendance du nombre de Reynolds critique en fonction de la tension superficielle entre les deux fluides. Cette étude nous permet de déterminer précisément les conditions de stabilité en fonction des viscosités, des densités, des épaisseurs des fluides et de la tension superficielle.

Abstract :

A theoretical model of flow containing two fluids arranged in a concentric geometry is derived. The long wave evolution equation is obtained by using a weighted residual approach combined with a long-wavelength expansion. It is shown, from linear stability analysis that critical Reynolds number varies with surface tension, viscosity ratio, density ratio and fluid thickness ratio.

Mots-clefs :

Instabilité; fluides visqueux ; écoulements coaxiaux, méthode des résidus pondérés.

1 Introduction

Les travaux concernant la stabilité et la croissance des ondes dans les écoulements de films dans une conduite cylindrique sont très vastes, particulièrement en ce qui concerne les études numériques. Ces études ont servi de point de comparaison pour vérifier la validité du modèle analytique développé dans ce travail. Nous avons construit un modèle décrivant l'écoulement de deux fluides à l'intérieur d'une conduite cylindrique. Ce travail fait suite à une étude en géométrie plane qu'on a déjà menée dans l'article [3], tandis que des résultats préliminaires pour le cas de l'écoulement coaxial en conduite circulaire de deux fluides visqueux ont été publiés dans l'article [1].

Nous rappelons certains travaux antérieurs sur les écoulements coaxiaux en conduite circulaire. En ce qui concerne les travaux numériques sur les équations d'Orr-Sommerfeld nous pouvons citer les travaux de Hickox [4], ainsi que ceux de Preziosi et al [5] qui ont résolu un problème aux valeurs propres. Hickox étudie le cas où le fluide interne est le moins visqueux des deux. Preziosi et al ont étudié le cas d'un écoulement lubrifiant.

En ce qui concerne les travaux théoriques Ruyer-Quil et al [2] ont étudié récemment l'écoulement d'un film liquide s'écoulant par gravité le long d'une fibre.

Dans ce travail nous présentons un modèle 2D permettant une description des instabilités interfaciales de deux couches de fluide s'écoulant par gravité à l'intérieur d'une conduite cylindrique. Le modèle développé combine un développement en gradient du profil de vitesse avec une méthode aux résidus pondérés, les fonctions tests employées sont de la forme de l'écoulement de base. Le modèle prend en compte les différents mécanismes physiques à savoir la tension superficielle, la dissipation visqueuse et l'inertie. Il se présente sous forme de deux équations couplées pour la hauteur de l'interface $h(x,t)$ et le débit instantané $q(x,t)$. Le modèle est validé par une étude de stabilité linéaire comparée aux résultats numériques de Hickox [4] et Preziosi et al [5].

2 Formulation du problème

On considère l'écoulement axisymétrique de deux fluides immiscibles newtoniens incompressible, de densité et viscosité différentes en écoulement à l'intérieur d'une conduite cylindrique de rayon R_2 sous l'effet de la gravité. Les notations utilisées dans ce document sont illustrées sur la figure 1. Le fluide interne noté 1 est totalement entouré par le fluide pariétal noté 2. Leurs viscosités dynamiques, densités et épaisseurs sont respectivement μ_j , ρ_j et R_j ($j = 1, 2$).

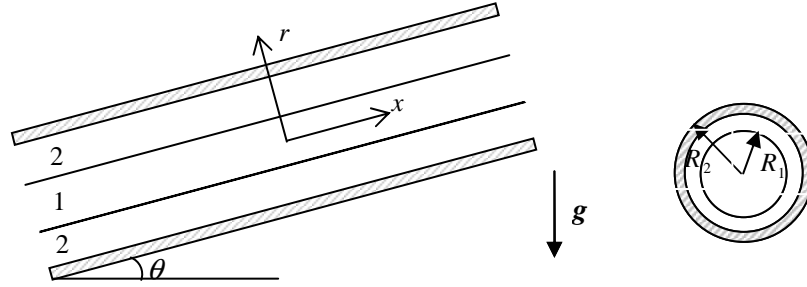


FIG. 1 – Géométrie de l'écoulement de deux fluides concentriques

L'interface entre les deux fluides est définie par $r = h(x,t)$ et possède une tension de surface σ . L'écoulement est décrit au sein de chaque fluide par les équations de Navier-Stokes et de continuités,

$$\rho_j (\partial_t \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_j \cdot \nabla \mathbf{v}_j) = -\nabla p_j + \rho_j \mathbf{g} + \mu_j \nabla^2 \mathbf{v}_j \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_j = 0 \quad (2)$$

où $\mathbf{v}_j = (u_j, v_j)$ représente le champ de vitesse, p la pression et \mathbf{g} l'accélération de la pesanteur.

La condition de non glissement à la paroi $R = R_2$ $\mathbf{v}_2 = 0$, (3)

à l'interface $r = h(x,t)$ nous avons la continuité des vitesses $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$, (4)

La condition cinématique à l'interface $v_1 = h_t + u_1 h_x$ (5)

Conditions de saut dynamique à l'interface :

$$\left[\mu \left\{ (u_r + v_x) \left(1 - h_x^2 \right) - 2(u_x - v_r) h_x \right\} \right] = 0 \quad (6)$$

$$\left[p + \frac{2\mu}{1 + h_x^2} \left\{ -v_r - u_x h_x^2 + h_x (u_r + v_x) \right\} \right] = -\sigma \left(1 + h_x^2 \right)^{-3/2} \left(h_{xx} - \frac{1}{h} + \frac{h_x^2}{2h} \right) \quad (7)$$

Lorsque l'écoulement est stationnaire et l'épaisseur constante ($h(x,t) = R_1$), la solution des équations (1)-(7) adimensionnées par le rayon R_1 de la région fluide 1 et la vitesse $u_0 = u_1(0) = \left(g \sin \theta R_1^2 / 4\nu_1 \mu \right) \left[\mu - \rho(1-d^2) + 2(1-\rho) \ln d \right]$ le long de l'axe de symétrie est donnée par la composante axiale de la vitesse :

$$U_1(r) = \frac{u_1}{u_1(0)} = 1 - \frac{\mu r^2}{\mu - \rho(1-d^2) - 2(1-\rho) \ln d} \quad (8)$$

$$U_2(r) = \frac{u_2}{u_1(0)} = \frac{-\rho(r^2 - d^2) - 2(1-\rho) \ln r + 2(1-\rho) \ln d}{\mu - \rho(1-d^2) - 2(1-\rho) \ln d} \quad (9)$$

où $r = R/R_1$, $d = R_2/R_1$, $\mu = \mu_2/\mu_1$ et $\rho = \rho_2/\rho_1$

3 Modèle développé

La mise sous forme adimensionnelle du système (1)-(6) est obtenue à l'aide des variables adimensionnelles suivantes :

$$u^* = u/u_0, x^* = x/\lambda, v^* = v\lambda/R_1 u_0, t^* = tu_0/\lambda, p^* = pR_1^2/\mu_1 u_0 \lambda$$

où λ est la longueur d'onde dans la direction de l'écoulement. Pour tenir compte de l'hypothèse de grandes longueurs d'onde, on introduit le paramètre $\varepsilon = R_1/\lambda \ll 1$, on négligera alors dans les équations du mouvement les termes d'ordre supérieur à ε^2 . Il est à noter que $\frac{\partial}{\partial t} \sim \frac{\partial}{\partial x} \sim \varepsilon$.

La pression est éliminée des équations de Navier Stokes en les intégrant le long de l'épaisseur. La pression intervient également dans la condition normale d'où elle peut être éliminée voir [1]. On obtient alors les équations d'évolutions suivantes pour chaque couche de fluide :

$$R\varepsilon \mathbf{N}_1 u_1 = \Delta_r u_1 - \mu \Delta_r u_2|_{r=d} + (1-\rho)G(1-\cot \theta) - W\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{h} - \varepsilon^2 \frac{h_x^2}{2h} - \varepsilon^2 h_{xx} \right) + \varepsilon^2 u_{1xx} \quad (10)$$

$$-\varepsilon^2 \frac{\partial v_{1r}}{\partial x} - \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} (v_{1r}|_h - \mu v_{2r}|_h) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_r^h \left(\frac{v_{1r}}{r} - \frac{v_1}{r^2} \right) dr + \varepsilon^2 \mu \frac{\partial}{\partial x} \int_r^d \left(\frac{v_{2r}}{r} \Big|_h - \frac{v_2}{r^2} \Big|_h \right) dr,$$

$$R\varepsilon \rho \mathbf{N}_2 u_2 = \mu \Delta_r u_2 - \mu \Delta_r u_2|_{r=d} + \varepsilon^2 u_{2xx} + \varepsilon^2 \mu \frac{\partial}{\partial x} \int_r^d \left(\frac{v_{2r}}{r} - \frac{v_2}{r^2} \right) dr - \varepsilon^2 \frac{\partial v_{2r}}{\partial x}, \quad (11)$$

$$\text{Où } \Delta_r = \partial_{rr} + 1/r \partial_r.$$

Les champs de vitesses axiales sont ensuite projetés sur un ensemble de fonctions tests s'inspirant de la forme de l'écoulement de base et qui satisfont aux conditions aux limites : adhérence à la paroi en $r=d$ et vitesse finie en $r=0$. Il peut être écrit dans chaque couche comme :

$$u_j(x,r,t) = u_j^{(0)} + \varepsilon u_j^{(1)} + O(\varepsilon^2) \quad (12)$$

où $u_j^{(0)}$ correspond à la solution à l'ordre zéro :

$$u_1^{(0)} = a_0(x, t) + a_1(x, t) \left(1 - \frac{r^2}{2h^2(x, t)} \right), u_2^{(0)} = b_0(x, t) \left(\frac{d^2 - r^2}{h^2(x, t)} \right) + b_1(x, t) \ln \left(\frac{r}{d} \right)$$

L'exploitation judicieuse des conditions aux limites nous permet de déterminer les paramètres $a_i(x, t)$ ainsi que les $b_i(x, t)$.

Lorsque l'interface est uniforme, seul le profil $u_j^{(0)}$ apparaît, les autres champs sont nuls. Les autres coefficients apparaissent avec les modulations de la hauteur de l'interface. Ecrivons les résidus correspondant à la méthode de Galerkin appliqués à (10) et (11). Cette technique nous permet d'éviter l'évaluation des corrections $u_j^{(1)}$ si les fonctions poids $g_i(r)$ sont choisies de manière appropriées aux conditions aux limites.

$$\begin{aligned} & \int_0^h \left\{ -R\epsilon \mathbf{N}_1 u_1 + \Delta_r u_1 - \mu \Delta_r u_2 \Big|_{r=d} + (1-\rho)G(1-\cot \theta) - W\epsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{h} - \epsilon^2 \frac{h_x^2}{2h} - \epsilon^2 h_{xx} \right) \right. \\ & + \epsilon^2 \left[u_{1xx} - \frac{\partial v_{1r}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (v_{1r}|_h - \mu v_{2r}|_h) + \frac{\partial}{\partial x} \int_r^h \left(\frac{v_{1r}}{r} - \frac{v_1}{r^2} \right) dr + \mu \frac{\partial}{\partial x} \int_r^d \left(\frac{v_{2r}}{r} \Big|_h - \frac{v_2}{r^2} \Big|_h \right) dr \Big] \Big\} g_1 r dr \\ & + \int_h^d \left\{ -R\epsilon \rho \mathbf{N}_2 u_2 + \mu \Delta_r u_2 - \mu \Delta_r u_2 \Big|_{r=d} \epsilon^2 \left[u_{2xx} + \mu \frac{\partial}{\partial x} \int_r^d \left(\frac{v_{2r}}{r} - \frac{v_2}{r^2} \right) dr - \frac{\partial v_{2r}}{\partial x} \right] \right\} g_2 r dr = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Dans cette expression les fonctions poids $g_i(r)$ assujetties aux conditions aux limites sont de la forme

$$\begin{aligned} g_1(r) &= \frac{1}{4} r^2 + \frac{h^2}{2\mu} \frac{(-h^4 + d^4 + \mu h^4)}{(h-d)^2(h+d)^2} \ln(h/d) - \frac{h^2}{2\mu} \frac{(-2h^2 + 2d^2 - \mu d^2 + 2\mu h^2)}{(h-d)(h+d)} \\ g_2(r) &= -\frac{h^2}{4\mu} \frac{(-2h^2 + 2d^2 + \mu h^2)}{(h-d)^2(h+d)^2} (r^2 - d^2) + \frac{h^2}{4\mu} \frac{(-2h^4 + 2d^4 + 2\mu h^4)}{(h-d)^2(h+d)^2} \ln(r/d) \end{aligned}$$

L'expression de l'équation d'évolution en fonction des paramètres est très longue, cependant nous pouvons dire qu'elle est de la forme :

$$(q_t)^t + (L)^t(q, h) + (D)^t(q, h) + (T)^t(q, h) = 0 \quad (14)$$

A partir de la définition du débit $q = \int_0^h 2\pi r u_1 dr$, le relèvement intégrale consiste à écrire la condition cinématique sous la forme

$$q_x / 2\pi + h h_t = 0 \quad (15)$$

Ces deux équations (14) et (15) dont les inconnues sont h et q forment le modèle développé. Elles décrivent le mouvement de l'interface dans un régime de grandes ondes pour des fluides dont la tension superficielle est grande : $W = O(k^{-2})$.

L'équation (14) fait apparaître les nombres adimensionnels définis par : le nombre de Reynolds $R = \rho_1 u_0 R_1 / \mu_1$, le nombre de Weber $W = \sigma / \mu_1 u_0 = J^* / R d$ qu'on a supposé $O(\epsilon^{-2})$ et $G = g \sin \theta R_1^2 / \nu_1 u_0$

4 Résultats de stabilité linéaire

On étudie ici la stabilité temporelle de l'écoulement de base vis-à-vis d'une petite perturbation. L'influence des nombreux paramètres sur l'évolution des petites perturbations est déterminée à partir de la linéarisation du système (28) autour de l'état de base caractérisé par :

$$h_0 = 1 \text{ et } q_0 = \frac{\pi}{2} \frac{(\mu - 2\rho + 4(1 - \rho)\ln d)}{\mu - \rho(1 - d^2) + 2(1 - \rho)\ln d}$$

En termes de modes normaux, la perturbation peut être écrite sous la forme : $(h, q) = (A, B)e^{i(kx - ct)}$ où k est le nombre d'onde réel et $c = c_r + ic_i$ est la vitesse complexe de l'onde. La résolution du système d'équations (14)-(15) donne une relation de dispersion explicitement et faisant intervenir 8 paramètres adimensionnels.

$$\mathcal{D}(k, \omega, d, \rho, \mu, R, J^*, \cot \theta) = 0 \quad (16)$$

Le développement aux petits nombres d'onde de la célérité : $c = c_0 + ikc_1 + \dots$, donne

$$c_0 = \frac{4(1 - \rho)}{\mu + 2(1 - \rho)\ln d - \rho(1 - d^2)} + \frac{(d^2 - 1)[\rho d^4 + (2\rho + \mu - 3)d^2 + (1 - \rho)(3 - 2\mu)]}{(\mu - 1 + d^4)(\mu + 2(1 - \rho)\ln d - \rho(1 - d^2))}$$

La célérité c_0 est exactement le résultat obtenu par Hickox [4] dans son développement asymptotique exact au seuil. Le modèle développé est également validé en comparant les résultats obtenus à l'ordre suivant aux résultats numérique de type Orr-Sommerfeld de Hickox [4] pour des valeurs de $\mu > 1$ et ceux Preziosi [5] pour des valeurs de $\mu < 1$ (voir Fig.2).

Sur la figure 2 de gauche sont représentés les nombres de Reynolds critiques R_c fonction des rapports des viscosités μ quand d le rapport des rayons est pris comme paramètre. Cette figure montre que le nombre de Reynolds critique n'existe que pour des valeurs particulières des rapports des rayons et des viscosités. Il existe un nombre de Reynolds critique au-delà duquel l'instabilité capillaire est totalement éliminée. La figure 2 de droite montre que l'interface est stable lorsque le fluide le moins visqueux est minoritaires : on retrouve l'effet de couche mince aux grandes ondes.

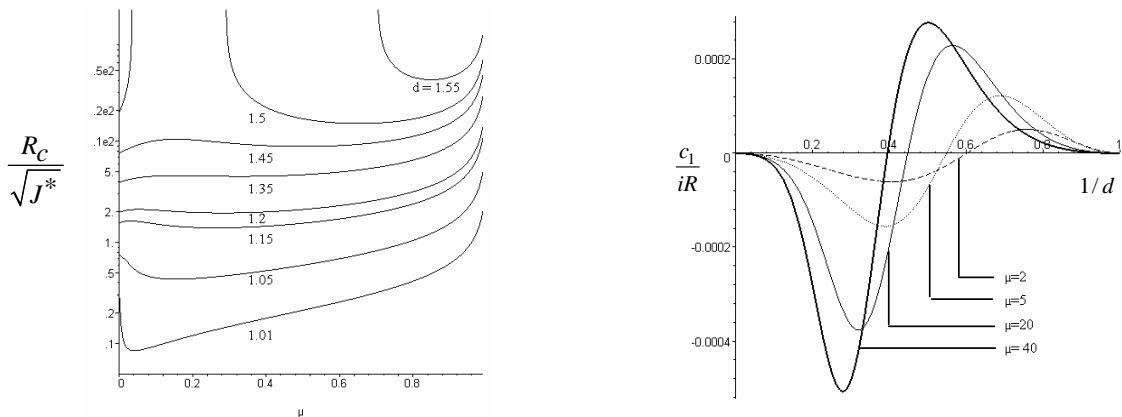


FIG. 2 – A gauche : Evolution du nombre de Reynolds critique R_c fonction de μ . A droite Célérité complexe en fonction de l'épaisseur du fluide 1. Les résultats correspondent au modèle développé pour $\rho = 1$.

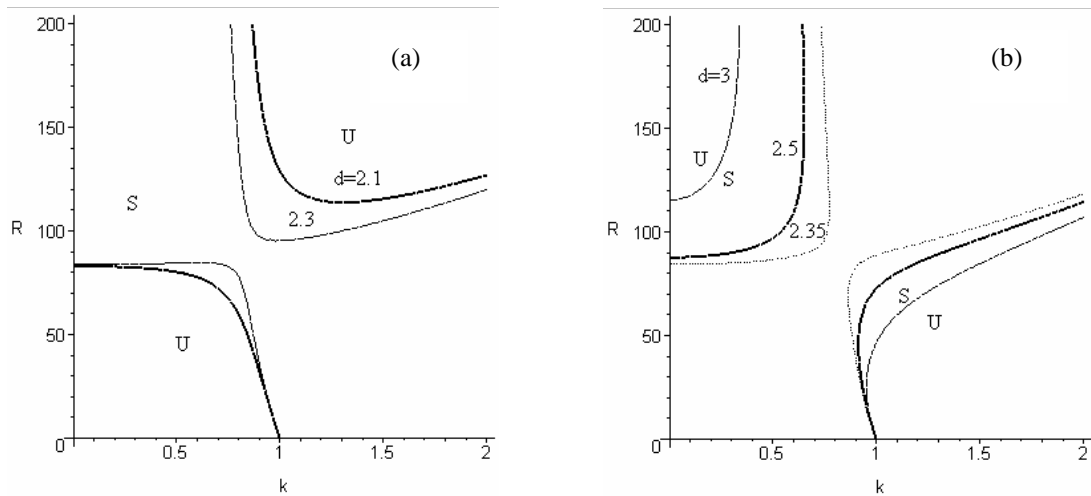


FIG. 3 – Courbe de stabilité marginale pour $J^* = 2100$, $\rho=0.548$, $\mu = 5.48$, $\theta=10^\circ$. La bande stable des nombres de Reynolds disparaît entre $d = 2.35$ et $d = 2.30$.

Le modèle a mis en évidence deux types d'instabilité : une instabilité de grande longueur d'onde $k < 1$ à faible nombre de Reynolds et une instabilité de courte longueur d'onde $k > 1$ observé à des nombres de Reynolds plus grands (Fig.3(a)). Les branches inférieures correspondent à une instabilité capillaire causée par la tension superficielle. Les branches supérieures correspondent à une instabilité de cisaillement. La topologie des courbes de stabilité peut changer en fonction des paramètres ρ , μ , et d (Fig.3(a) et 3(b)).

5 Conclusions

Dans ce travail nous nous sommes intéressés au développement d'un modèle décrivant l'évolution d'ondes longues à l'interface entre deux couches de fluides de viscosité et de densité différentes s'écoulant par gravité à l'intérieur d'une conduite cylindrique. Le modèle est validé par une étude numérique de type Orr-Sommerfeld [4] et [5]. En plus d'une instabilité hydrodynamique mise en évidence dans un canal plan [3], l'écoulement en géométrie cylindrique met en évidence une instabilité capillaire.

Références

- [1] N. MEHIDI et N. AMATOUSSE, Modélisation d'un écoulement coaxial en conduite circulaire de deux fluides visqueux, C.R.Mécanique, **337**, 112-118, 2009
- [2] Ruyer-Quil, P. Treveleyan, F. Giorgiutti, C. Duprat and S. Kalliadasis, Modelling film flows down fibre J. Fluid Mech. **603**, 431-462, 2008.
- [3] M. Amaouche, N. Mehidi, N. Amatusse, Linear stability of a two layer film flow down an inclined channel : A second-order weighted residual approach, Phys. Fluids **19**, 2007.
- [4] C. E., Hickox, Instability due to viscosity and density stratification in axisymmetric pipe flow, Phys. Fluids **14**, 1971.
- [5] L. Preziosi, K. Chen, D.D. Joseph, Lubricated pipelining: stability of core-annular flow, J. Fluid Mech. **201**, 1989.